Méthodes de théorie de la réduction

10 janvier 2019

1 Eléments propres

1.1

Soit λ une valeur propre simple (i.e. de multiplicité algébrique 1) de $A \in M_n(\mathbf{K})$. Donner un vecteur propre attaché à λ à l'aide de mineurs de $A - \lambda I_n$.

1.1.1

Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$ une matrice de rang 1. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que leurs multiplicités. On donnera deux méthodes :
a) Avec le noyau et la trace ;
b) A l'aide d'une décomposition $A = X{}^tY$ où X et Y sont deux matrices colonne.

1.1.2

Valeurs propres de l'endomorphisme de $\mathbf{C}_n[X]$ défini par $P \to (X^2 - 1)P" + (2X + 1)P'$.

1.2

(Grand classique) Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Pour $f \in E$ on pose $\Phi(f)(x) = \int_0^1 \max(x,t) f(t)\, dt$.
Montrer que Φ est un endomorphisme de E et déterminer ses valeurs propres et ses fonctions propres.

1.3

Réduire la matrice réelle de taille n :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

HADAMARD

dab

On montrera que toute valeur propre λ vérifie est $|\lambda| \leq 2$. On pose désormais $\lambda = 2\cos\theta$ avec pour l'instant $\theta \in]0, \pi[$; soit (x_k) un vecteur propre réel de A, en posant $x_0 = x_{n+1} = 0$ montrer que (x_k) vérifie une récurrence linéaire d'ordre deux et conclure.

1.4

E est un $\mathbf{C} - ev$ de dimension finie. Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. On suppose :

$$\exists w \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}, \ u \circ w = w \circ v$$

Montrer que u et v ont une valeur propre commune.

2 Diagonaphilie, polynômes

2.0 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. MQ : u diagonalisable $\Leftrightarrow$ tout sev de $\mathbb{C}^n$ stable par u possède un supplémentaire stable par u

2.1

Condition nécessaire et suffisante portant sur les trois nombres complexes a, b, c pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

2.2

Trouver une racine dela matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2.3

Quels sont les nombres entiers $m \geq 1$ pour lesquels il existe une matrice de $GL_2(\mathbf{Z})$ d'ordre m ?

2.4 Matrice bloc.

Soient λ et μ deux nombres complexes distincts, B dans $M_n(\mathbf{C})$ et et $M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ 0 & \mu I_n \end{pmatrix}$. CNS pour que M soit diagonalisable. (Quel peut être la forme d'un polynôme annulateur de M ?).

2.5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que M soit diagonalisable, où on a posé :

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

2.6

Soient

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ deux matrices supposées diagonalisables. Étudier la diagonalisabilité de leur *produit tensoriel* :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes A = \begin{pmatrix} aA & cA \\ bA & dA \end{pmatrix}$$

2.7

Réduire la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & . & . \\ 0 & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer alors, les nombres $(a_i)_{i=0}^n$ étant donné, le déterminant circulant $\det M$ où :

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_n & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ . & . & & . \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

2.8 Important, méthodes des images

Soient $(a_k) \in \mathbf{C}^n$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Quel est le rang de A ? Quelle est l'image de A ? Donner les éléments propres de A et étudier son caractère diagonalisable.

2.9 Retour de C vers R

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $A \in M_{3n}(\mathbf{R})$ telle que $A^3 + A = 0$ et $rg(A) = 2n$.
a) Montrer que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$.
b) Donner les multiplicités des valeurs propres complexes de A.
c) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de l'espace propre complexe $ker(A - iT_n)$. En utilisant entre autres les parties réelles et imaginaires de ces vecteurs, montrer que A est semblable dans $M_{3n}(\mathbf{R})$ à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$